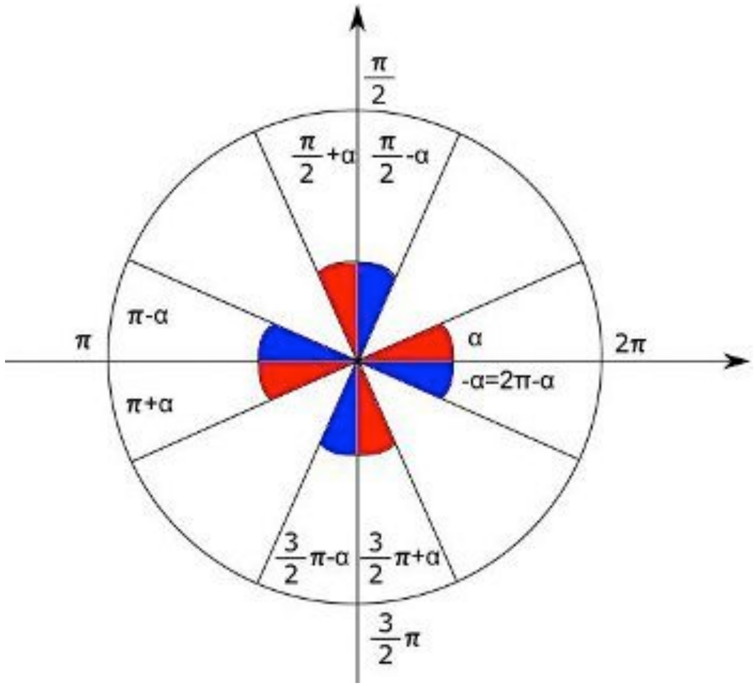


Matematica

GONIOMETRIA
Le formule goniometriche

DOCENTE: Vincenzo Pappalardo

MATERIA: Matematica

definizione

Sono detti **angoli associati** a un angolo **α** quegli angoli la cui somma o differenza con **α** abbia i seguenti valori: 0°, 90°,180°, 270° e 360°. Ossia:

$$-\alpha \qquad 90°-\alpha \qquad 90°+\alpha \qquad 180°-\alpha \qquad 180+\alpha$$

$$270°-\alpha \qquad 270°+\alpha \qquad 360°+\alpha$$

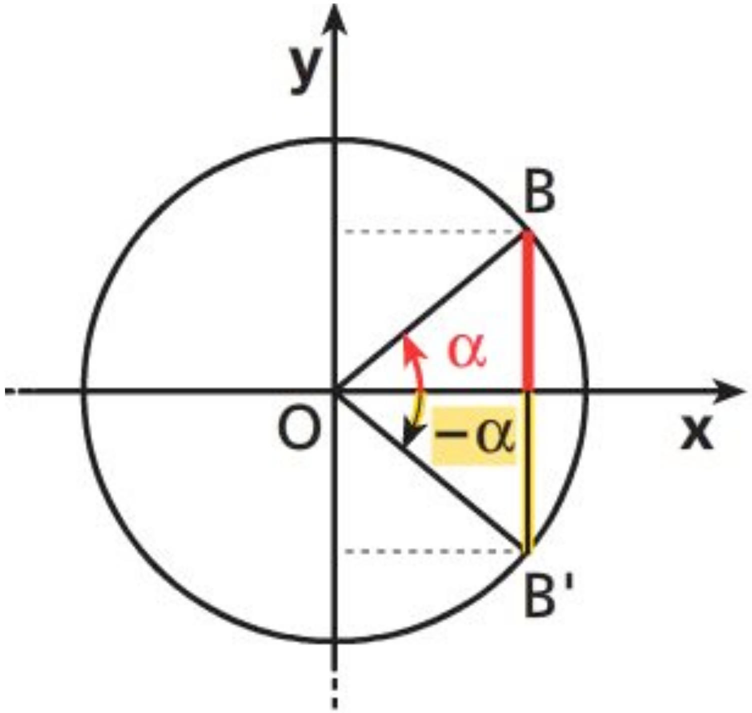
Determiniamo le funzioni goniometriche degli angoli associati ad α in funzione delle funzioni goniometriche dell'angolo α.

➢ Angoli opposti: $\alpha+(-\alpha)=0$

I due angoli α e $-\alpha$ sono congruenti e orientati in verso opposto, per cui:

$$sen(-\alpha) = y_{B'} = -y_B = -sen\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = x_{B'} = x_B = \cos\alpha$$

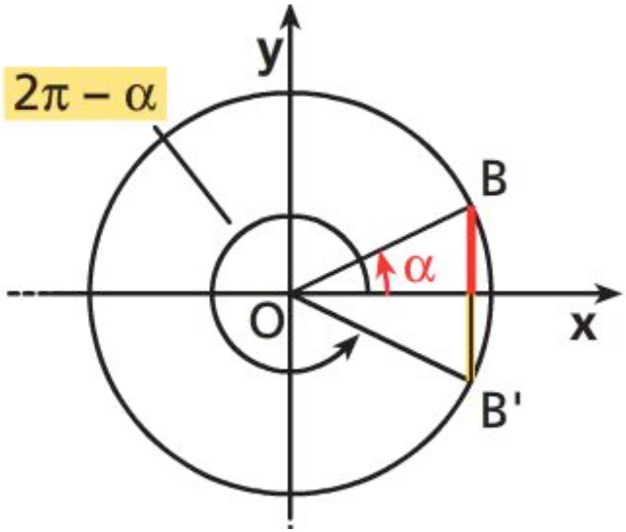


Pertanto:

$$sen(-\alpha) = -sen\alpha \qquad tg(-\alpha) = \frac{sen(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -tg\alpha$$

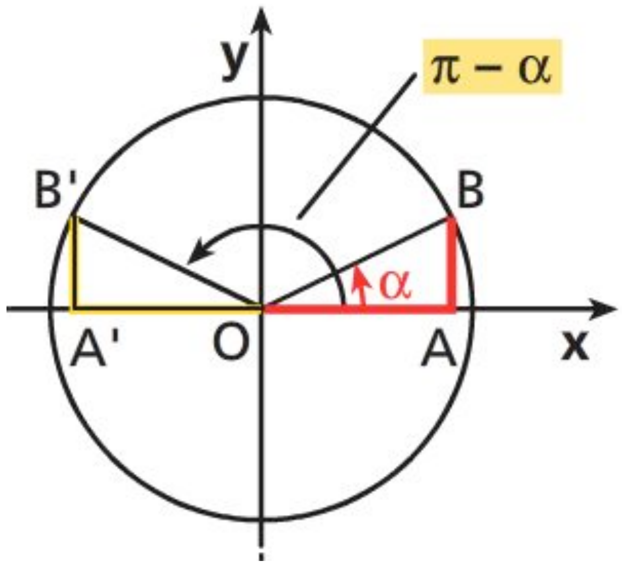
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \qquad cotg(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{sen(-\alpha)} = -\cot g\alpha$$

- Angoli esplementari: $\alpha+(2\pi-\alpha)=2\pi$



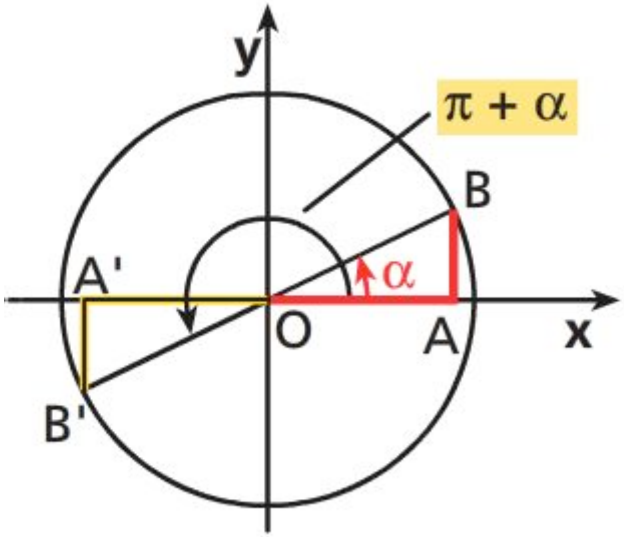
$$sen(2\pi-\alpha)=-sen\alpha$$
$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha$$
$$cotg(2\pi-\alpha)=-\cot g\alpha$$

- Angoli supplementari: $\alpha+(\pi-\alpha)=\pi$



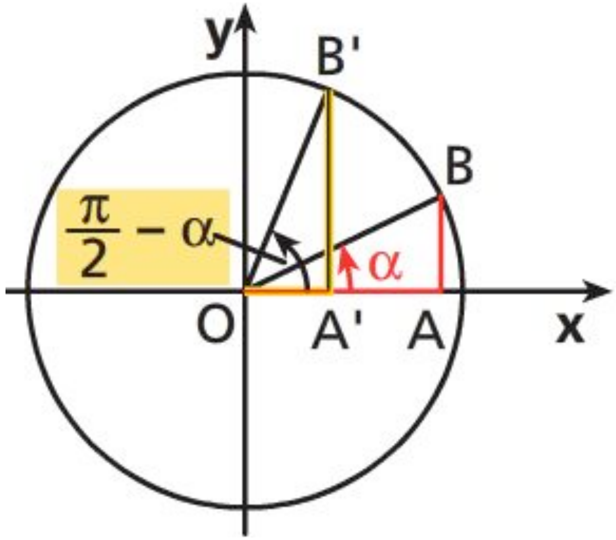
$$sen(\pi-\alpha)=sen\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha$$
$$cotg(\pi-\alpha)=-\cot g\alpha$$

➢ Angoli che differiscono di π : $(\pi+\alpha)-\alpha=\pi$



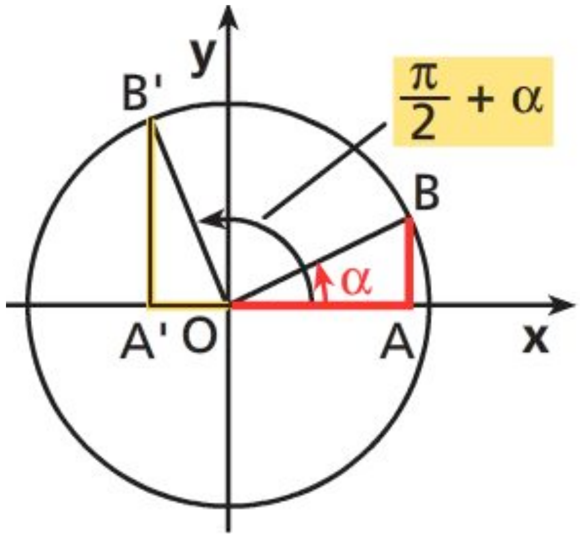
$$sen(\pi+\alpha)=-sen\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$
$$tg(\pi+\alpha)=tg\alpha$$
$$cotg(\pi+\alpha)=\cot g\alpha$$

➢ Angoli complementari: $(\pi/2-\alpha)+\alpha=\pi/2$



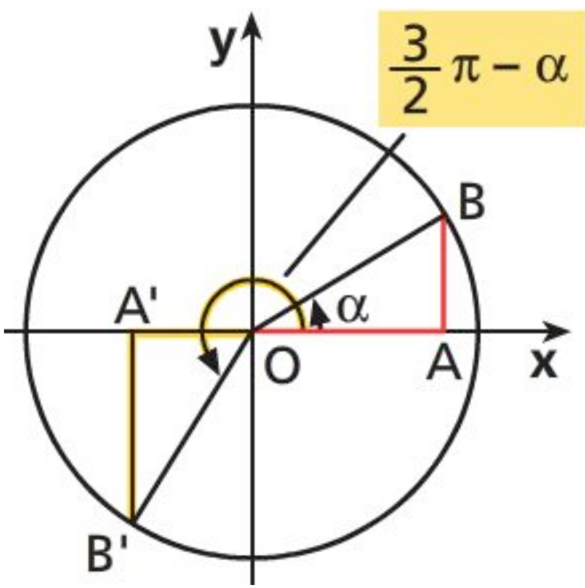
$$sen(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\pi/2-\alpha)=sen\alpha$$
$$tg(\pi/2-\alpha)=cotg\alpha$$
$$cotg(\pi/2-\alpha)=\mathrm{t}\,g\alpha$$

➢ Angoli che differiscono di $\pi/2$: $(\pi/2+\alpha)-\alpha=\pi/2$



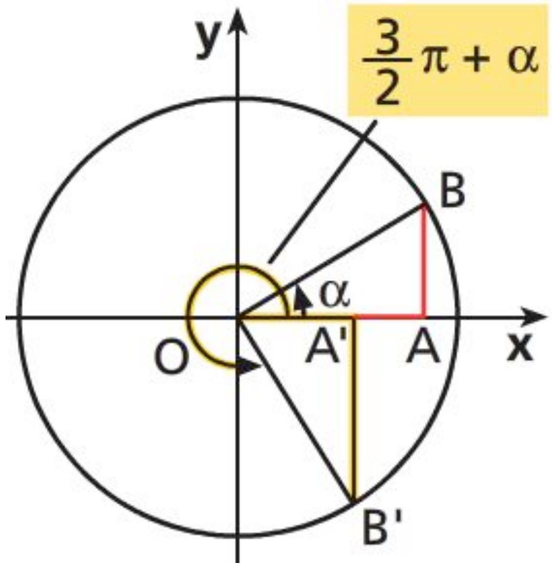
$$sen(\pi/2+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\cos(\pi/2+\alpha)=-sen\alpha$$
$$tg(\pi/2+\alpha)=-cotg\alpha$$
$$cotg(\pi/2+\alpha)=-tg\alpha$$

➢ Angoli la cui somma è $3\pi/2$: $(3\pi/2-\alpha)+\alpha=3\pi/2$



$$sen(3\pi/2-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\cos(3\pi/2-\alpha)=-sen\alpha$$
$$tg(3\pi/2-\alpha)=cotg\alpha$$
$$cotg(3\pi/2-\alpha)=tg\alpha$$

➢ Angoli la cui differenza è 3 π /2: (3π/2+α)-α=3π/2



$$sen(3\pi/2+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(3\pi/2+\alpha) = sen\alpha$$
$$tg(3\pi/2+\alpha) = -cotg\alpha$$
$$cotg(3\pi/2+\alpha) = -tg\alpha$$

➢ Riduzione al primo quadrante

Significa trovare un angolo del primo quadrante le cui funzioni goniometriche abbiano, eventualmente a meno del segno, gli stessi valori dell'angolo dato.

esempio

$$sen120° \xrightarrow{sen(90°+\alpha)=\cos\alpha}$$

$$sen(90°+30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

angoli opposti
(α e $-\alpha$)

Semplificare la seguente espressione:

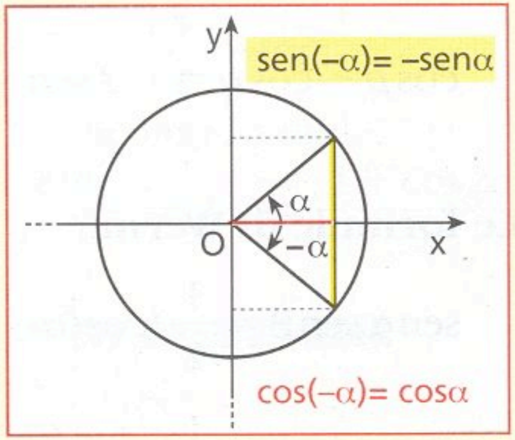
$$sen(-\alpha)+2\cos(-\alpha)+\sec(-\alpha)\cot g(-\alpha)sen\alpha+sen\alpha$$

Trasformiamo prima di tutto le funzioni di $-\alpha$ in funzioni di α notando in figura che:

$$\operatorname{sen}(-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha; \quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$$

e quindi:

$$\sec(-\alpha)=\sec\alpha; \quad \operatorname{cotg}(-\alpha)=-\operatorname{cotg}\alpha.$$



L'espressione diventa:

$$-\operatorname{sen}\alpha+2\cos\alpha+\sec\alpha(-\operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha.$$

Trasformiamo $\sec\alpha$ e $\operatorname{cotg}\alpha$ in funzione di $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ e semplifichiamo:

$$-\operatorname{sen}\alpha+2\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\left(\frac{-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha=2\cos\alpha-1.$$

angoli complementari
(α e $\pi/2-\alpha$)

Semplificare la seguente espressione:

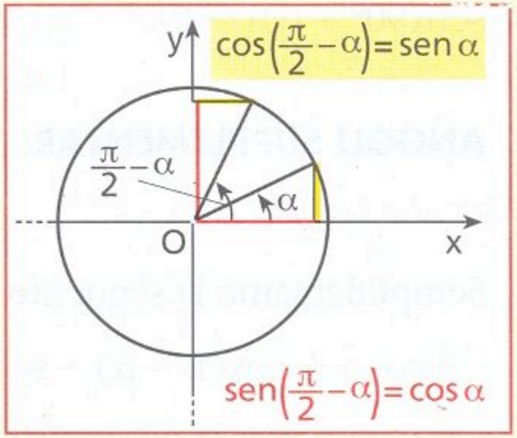
$$sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\alpha+\cos ec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Trasformiamo cosec $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ in funzione di sen $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\alpha+\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Trasformiamo le funzioni di $\frac{\pi}{2}-\alpha$ in funzione di α tenendo conto delle relazioni della figura.

L'espressione diventa: $\cos\alpha-\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\operatorname{sen}\alpha=\operatorname{tg}\alpha$.



angoli che differiscono di un angolo retto (α e $\pi/2+\alpha$)

Semplificare la seguente espressione:

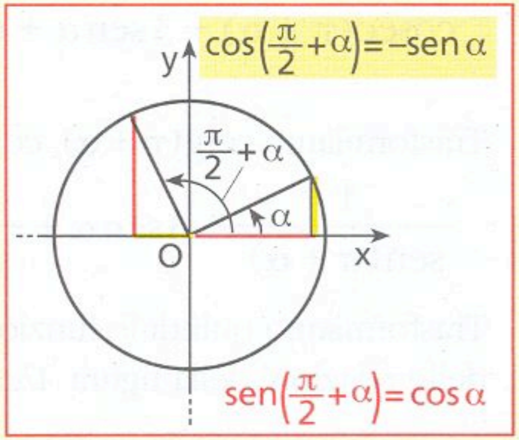
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+sen\alpha+\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)sen\alpha+sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

Trasformiamo $\sec\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ in funzione di $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $\frac{\pi}{2}+\alpha$ in funzione di α tenendo conto delle relazioni della figura.

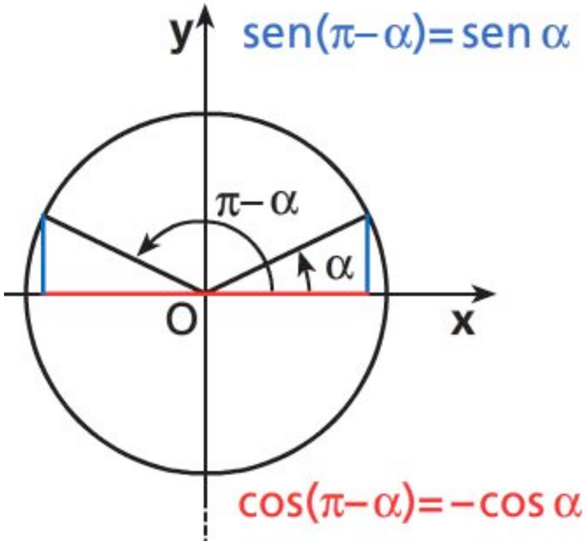
L'espressione diventa: $-\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\alpha+\frac{1}{-\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=-1+\cos\alpha.$



angoli supplementari
(α e π-α)

Semplificare la seguente espressione:

$$3\cos\alpha + \cos(\pi-\alpha) - sen\alpha + 2\cot g(\pi-\alpha)sen\alpha + 2sen(\pi-\alpha)$$



Utilizzando la definizione di cotangente e le relazioni indicate in figura, l'espressione diventa:

$$3\cos\alpha - \cos\alpha - sen\alpha + 2\frac{-\cos\alpha}{sen\alpha}sen\alpha + 2sen\alpha$$

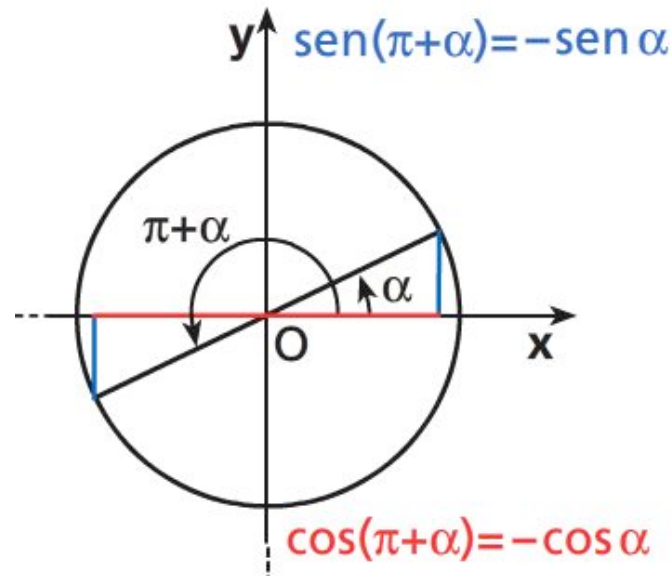
Semplificando si ottiene:

$$2\cos\alpha + sen\alpha - 2\cos\alpha = sen\alpha$$

angoli differiscono
angolo piatto (α e $\pi+\alpha$)

Semplificare la seguente espressione:

$$\cos ec(\pi+\alpha)+3sen\alpha+\cot g(\pi+\alpha)\sec\alpha+2sen(\pi+\alpha)$$



Utilizzando la definizione di cosec, cotg e sec, e le relazioni indicate in figura, l'espressione diventa:

$$\frac{1}{-sen\alpha}+3sen\alpha+\frac{-\cos\alpha}{-sen\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}-2sen\alpha$$

Semplificando si ottiene: $$-\frac{1}{sen\alpha}+sen\alpha+\frac{1}{sen\alpha}=sen\alpha$$

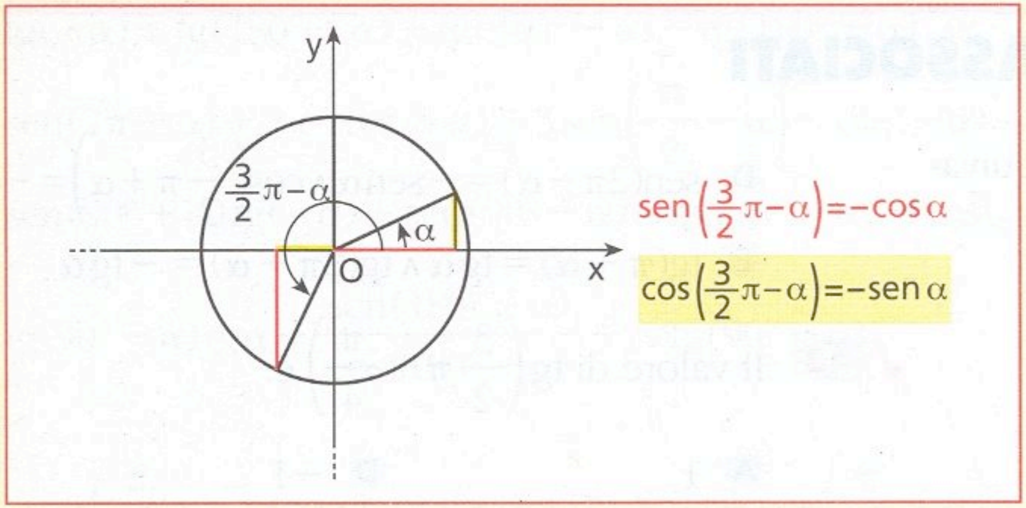
angoli la cui somma o differenza è 3/2 π (α e 3/2π-α; α e 3/2π+α)

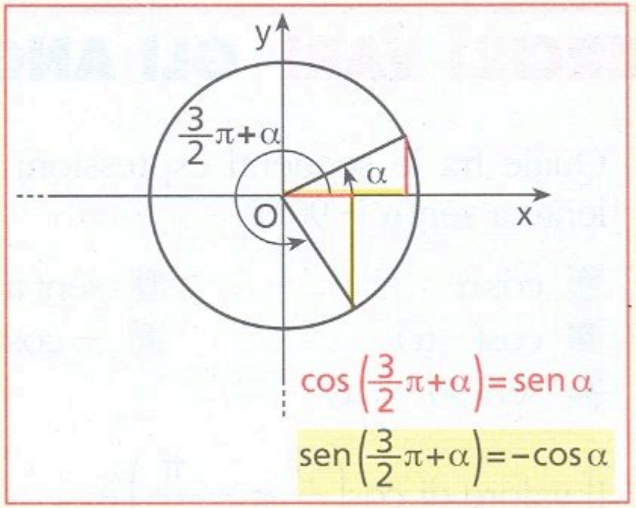
Semplificare la seguente espressione:

$$sen\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos\alpha+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)-\cot g\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$$

Trasformiamo le funzioni di $\frac{3}{2}\pi-\alpha$ e $\frac{3}{2}\pi+\alpha$ in funzioni di α tenendo conto delle relazioni delle figure:

$$-\cos\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha(-\operatorname{sen}\alpha)+\operatorname{tg}\alpha=-\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha=-1+\operatorname{tg}\alpha.$$





angoli esplementari (α e 2π-α)

Semplificare la seguente espressione:

$$3sen(2\pi-\alpha)+\cos(2\pi-\alpha)\sec\alpha+2sen\alpha-1$$

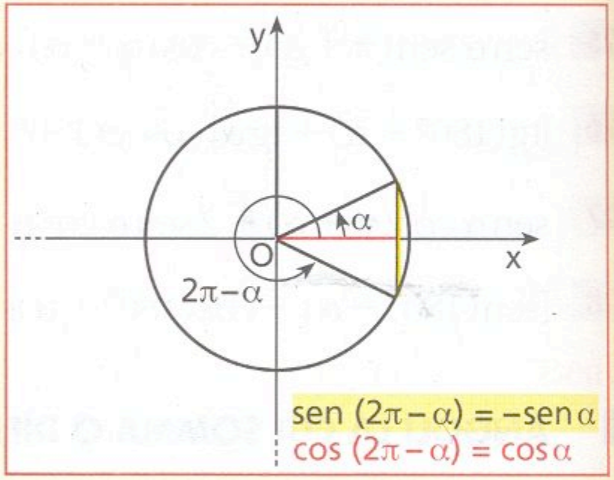
Trasformiamo $\sec\alpha$ in funzione del coseno:

$$3\,\text{sen}(2\pi-\alpha)+\cos(2\pi-\alpha)\frac{1}{\cos\alpha}+2\,\text{sen}\,\alpha-1.$$

Trasformiamo quindi le funzioni di $2\pi-\alpha$ in funzione di α tenendo conto delle relazioni della figura. L'espressione diventa:

$$-3\,\text{sen}\,\alpha+\cos\alpha\frac{1}{\cos\alpha}+2\,\text{sen}\,\alpha-1=$$

$$=-3\,\text{sen}\,\alpha+1+2\,\text{sen}\,\alpha-1=-\,\text{sen}\,\alpha.$$



Riduzione al primo quadrante

Esprimere i seguenti angoli mediante la riduzione al primo quadrante:

$$sen225° \qquad tg\frac{5}{3}\pi$$

$$sen225° = sen(180° + 45°) \xrightarrow{sen(180°+\alpha)=-sen\alpha} -sen45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\frac{5}{3}\pi = tg\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha} -tg\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Risolvere la seguente espressione con l'aiuto degli angoli associati:

$$\sin(\pi - x) + \frac{\cos(-x)}{1 - \tan(\pi - x)} - \sin(2\pi + x) - \frac{\cos(2\pi - x)}{\tan(\pi + x)} - 1$$

Semplificare l'espressione trigonometrica con l'aiuto degli angoli associati:

$$\sin(x) + \frac{\cos(x)}{1 + \tan(x)} - \sin(x) - \frac{\cos(x)}{\tan(x)} - 1$$

Introducendo la definizione di tangente e semplificando, si ottiene:

$$\frac{\cos^2(x)}{\cos(x) + \sin(x)} - \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} - 1$$

Effettuiamo il mcm:

$$\frac{\sin x\cos^2 x-\cos^2 x(\cos x+\sin x)-\sin x(\cos x+senx)}{\sin x(\cos x+\sin x)}$$

Svolgendo le parentesi e semplificando, si ottiene:

$$\frac{\sin x\cos^2 x-\cos^3 x-\sin x\cos^2 x-\sin x\cos x-\sin^2 x}{\sin x(\cos x+\sin x)}=$$

$$=\frac{-\cos^3 x-\sin x\cos x-\sin^2 x}{\sin x(\cos x+\sin x)}$$

Verificare la seguente uguaglianza:

$$\frac{\cos 330°}{\cos 30°}+\frac{\sin^2(-150°)}{\cos 420°\cdot \operatorname{cos}ec 210°}=\cos^2 30°$$

Utilizziamo le seguenti formule per gli angoli associati:

$$\cos 330° = \cos(-30°) = \cos 30° \qquad \sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30°$$

$$\sin^2(-150°) = \sin^2 150° = \sin^2(90° + 60°) = \cos^2 60°$$

$$\cos 420° = \cos(360° + 60°) = \cos 60° \qquad \cos ec 210° = \cos ec(180° + 30°) = -\cos ec 30°$$

e sostituiamole nell'uguaglianza:

$$\frac{\cos 30°}{\cos 30°}+\frac{\cos^2 60°}{\cos 60°\cdot(-\cos ec 30°)}=\cos^2 30°$$

Introducendo la definizione di cosecante e semplificando, l'uguaglianza sarà verificata:

$$1-\cos 60°\cdot sen 30° = \cos^2 30° \xrightarrow{\cos 60° = sen 60°} 1 - sen^2 30° = \cos^2 30$$

$$\xrightarrow{1 - sen^2\alpha = \cos^2\alpha} \cos^2 30° = \cos^2 30°$$

Le funzioni goniometriche variano al variare dell'angolo **α**, ma non variano proporzionalmente a esso. Per esempio:

FALSO

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta \xrightarrow{FALSO} \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{6}$$

Con l'uso delle calcolatrici, le formule goniometriche attualmente conservano interesse solo in ambito teorico e per dimostrare alcuni enunciati.

❑ Le formule di addizione

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

solo se:

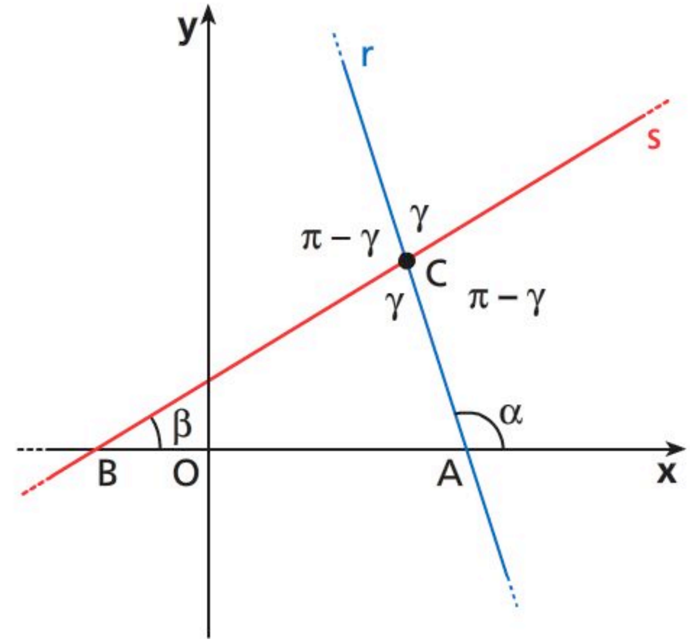
$$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k_2\pi$$

❑ Le formule di sottrazione

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ solo se: $\alpha-\beta\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi,\ \beta\neq\dfrac{\pi}{2}+k_2\pi$

esempio

Determinare l'angolo γ fra due rette.



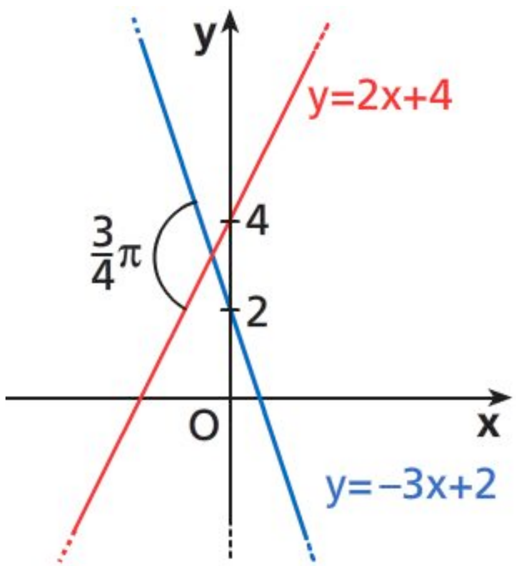
Poiché α è angolo esterno del triangolo ABC, allora:

$$\alpha = \beta + \gamma \Rightarrow \gamma = \alpha - \beta$$

$$tg\gamma = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta} = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

$m = tg\alpha \quad coeff.\ ang.\ retta\ r$

$m' = tg\beta \quad coeff.\ ang.\ retta\ s$



$$tg\gamma = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1 \Rightarrow \gamma = arctg(-1) = \frac{3}{4}\pi$$

esercizio

Calcolare le funzioni goniometriche di 75° e cos15°.

Sappiamo che $75° = 30° + 45°$.

Applichiamo le formule di addizione del seno, del coseno e della tangente e otteniamo:

$$\operatorname{sen}(30° + 45°) = \operatorname{sen} 30° \cos 45° + \operatorname{sen} 45° \cos 30°;$$

$$\cos(30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°;$$

$$\operatorname{tg}(30° + 45°) = \frac{\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 45°}{1 - \operatorname{tg} 30° \operatorname{tg} 45°}.$$

Poiché $\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 45° = 1$, se sostituiamo ed eseguiamo i calcoli otteniamo:

$$\operatorname{sen} 75° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4};$$

$$\cos 75° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{tg} 75° = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 3}{3}}{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3} \cdot \frac{3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}}.$$

Razionalizzando si ha: $\operatorname{tg} 75° = 2 + \sqrt{3}$.

Calcoliamo ora $\cos 15°$.

Possiamo scrivere:

$$15° = 45° - 30°.$$

Per la formula di sottrazione del coseno, otteniamo:

$$\cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

esercizio

Sviluppare le seguenti espressioni:

$$sen\left(\frac{\pi}{6}+x\right) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

Applichiamo le formule di addizione e sottrazione:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\cos x+\operatorname{sen}x\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x.$$

Le formule di duplicazione

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

solo se:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Queste formule permettono di calcolare le funzioni goniometriche dell'angolo 2α conoscendo il valore delle funzioni goniometriche dell'angolo α.

esistenza di	condizione
$\operatorname{tg} 2\alpha$	$2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
denominatore	$\operatorname{tg}\alpha \neq \pm 1 \rightarrow \alpha \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$

In sintesi, la formula di $\operatorname{tg} 2\alpha$ vale per:

$$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

esercizio

Sviluppare sen4α utilizzando le formule di duplicazione

Per far ciò dobbiamo applicare due volte tali formule. Nella prima applicazione scriviamo:

$$\operatorname{sen} 4\alpha = \operatorname{sen}(2 \cdot 2\alpha) = 2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha.$$

Sostituiamo nell'espressione trovata le espressioni corrispondenti a $\operatorname{sen} 2\alpha$ e $\cos 2\alpha$:

$$2 \operatorname{sen} 2\alpha \cos 2\alpha = 2(2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha)(\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) = 4(\operatorname{sen} \alpha \cos^3 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha \cos \alpha).$$

Quindi:

$$\operatorname{sen} 4\alpha = 4(\operatorname{sen} \alpha \cos^3 \alpha - \operatorname{sen}^3 \alpha \cos \alpha).$$

esercizio

Calcolare sen2**α**, cos2**α**, tg2**α**, sapendo che il lato termine di **α** appartiene al 2° quadrante e cos**α**=-4/5

$$\operatorname{sen}\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = +\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4},$$

Il seno è positivo perché l'angolo ha lato termine nel secondo quadrante.

quindi:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\frac{9}{16}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{7} = -\frac{24}{7}$$

esercizio

Senza determinare il valore di α , calcolare sen2α, cos2α e tg$(2\alpha+\pi/3)$ sapendo che sen$\alpha=3/5$ e $\pi/2<\alpha<\pi$.

- Consideriamo sen 2α e applichiamo la formula di duplicazione del seno, sen $2\alpha = 2$ sen α cos α. Determiniamo cos α per mezzo della prima relazione fondamentale, osservando che cos α deve essere negativo, poiché $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}.$$

Sostituendo i valori di cos α e sen α otteniamo:

$$\mathrm{sen}\,2\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

- Per determinare cos 2α, applichiamo una delle formule di duplicazione e sostituiamo al seno e al coseno i valori corrispondenti:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \mathrm{sen}^2\alpha = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}.$$

- Per calcolare $\operatorname{tg}\left(2\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$ applichiamo la formula di addizione:

$$\operatorname{tg}\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \ \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}}.$$

Calcoliamo $\operatorname{tg} 2\alpha$ con la formula di duplicazione:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Essendo $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{3}{5}}{-\dfrac{4}{5}} = -\dfrac{3}{4}$, si ha:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\cancel{2}^{1}\left(-\dfrac{3}{\cancel{4}_{2}}\right)}{1 - \dfrac{9}{16}} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{7} = -\frac{24}{7}.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\operatorname{tg}\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\dfrac{24}{7} + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\,\dfrac{24}{7}} = \frac{-24 + 7\sqrt{3}}{7 + 24\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3} - 24}{7 + 24\sqrt{3}}$$

Le formule di bisezione

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \quad \text{solo se } \alpha\neq\pi+2k\pi$$

$$=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} \quad \text{solo se } \alpha\neq\pi+2k\pi$$

$$=\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \quad \text{solo se } \alpha\neq\pi+k\pi$$

Nelle applicazioni il segno +/- va scelto in base al quadrante in cui si trova **α/2.**

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} \quad con\ \alpha\neq\pi+2k\pi$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} \quad con\ \alpha\neq\pi+k\pi$$

Queste formule sono più comode perché sono razionali e non presentano il doppio segno ±.

esercizio

Calcoliamo $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ quando $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{12}{13}$ e $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Se $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3}{4}\pi$ quindi il lato termine di $\frac{\alpha}{2}$ appartiene al secondo quadrante.

Il valore del coseno di α è:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}.$$

Quindi:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{5}{13}}{2}} = -\sqrt{\frac{\cancel{8}^{4}}{13}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{5}{13}}{2}} = \sqrt{\frac{\cancel{18}^{9}}{13}\cdot\frac{1}{\cancel{2}_{1}}} = \frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{8}{13}} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}.$$

■ Il valore assoluto di $\cos\alpha$ si ricava con:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

il segno « − » deriva dal fatto che il lato termine di α è nel terzo quadrante.

■ $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ si può ricavare anche applicando la definizione:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{13}}{13}}{-\frac{2\sqrt{13}}{13}} = -\frac{3}{2}.$$

❑ Le formule parametriche

$$\begin{cases} sen\alpha = \dfrac{2tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}} \\ \cos\alpha = \dfrac{1-tg^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}} \end{cases} \quad con \quad \alpha \neq \pi + 2k\pi$$

Se poniamo t=tgα/2, le formule assumono la forma parametrica nel parametro t:

$$sen\alpha = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

esercizio

Calcoliamo $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$ sapendo che $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$.

Posto $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t = 2$, si ha:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5}.$$

❑ Le formule di prostaferesi

- $\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$;
- $\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$;
- $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$;
- $\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}$.

Queste formule permettono di trasformare la somma o la differenza di due funzioni goniometriche in un prodotto di funzioni goniometriche.

Le formule di Werner

$$sen\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$sen\alpha sen\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

Queste formule permettono di trasformare espressioni contenenti prodotti di funzioni seno e coseno in somme e differenze di funzioni seno e coseno.

esercizio

Applichiamo le formule di prostaferesi:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}=2\cos\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}}{2}\operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{12}}{2}=$$

$$=2\cos\frac{\pi}{6}\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}.$$

esercizio

Applichiamo le formule di Werner:

$$\cos\frac{5}{12}\pi\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5}{12}\pi+\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{5}{12}\pi-\frac{\pi}{12}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

ESERCIZIO GUIDA

Determiniamo il periodo delle seguenti funzioni:

a) $y = \operatorname{sen} 3x + \cos 5x$; **b)** $y = \dfrac{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x}{\cos 3x}$.

a) Il periodo di sen $3x$ è $T_1 = \dfrac{2\pi}{3}$, quello di cos $5x$ è $T_2 = \dfrac{2\pi}{5}$.

Scriviamo T_1 e T_2 con denominatore comune: $T_1 = \dfrac{10}{15}\pi$, $T_2 = \dfrac{6}{15}\pi$.

Consideriamo il minimo comune multiplo fra i numeratori:

m.c.m.$(10; 6) = 30$.

Si ha pertanto uno stesso valore della funzione per x_0 e $x_0 + \dfrac{30}{15}\pi$, perché $\dfrac{30}{15}\pi$ contiene un numero intero di volte sia T_1 sia T_2.

Quindi $\dfrac{30}{15}\pi = 2\pi$ è il periodo cercato.

Osservazione. In generale, non ci sono regole per determinare il periodo di funzioni che siano somme o prodotti di altre funzioni periodiche. Tuttavia, se si hanno due funzioni periodiche con periodi diversi T_1 e T_2, e se esistono multipli comuni di T_1 e T_2, allora le funzioni somma o prodotto hanno periodo uguale al minimo comune multiplo dei periodi.

b) Deve essere $\cos 3x \neq 0$, cioè:

$$3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \rightarrow \quad x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}.$$

Applicando una delle formule di prostaferesi, otteniamo:

$$\frac{\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen} 2x}{\cos 3x} = \frac{2\cancel{\cos 3x}\operatorname{sen} x}{\cancel{\cos 3x}} = 2\operatorname{sen} x.$$

Quindi il periodo cercato è 2π.